数理解析研究所講究録
174巻 1973年 228-234

Semi-linear な方程式の解の成長と分枝マルコフ過程

阪大理　池田信行

$\underline{\underline{1^\circ}}$.　R^d, $d \geqq 1$, で方程式

(1)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u + G(u) \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

を考える。こゝで $G : [0,1] \longrightarrow R^1_+$ は次の条件をみたす。

(2)
$$\begin{cases} \text{(i)} & G \text{ は } [0,1] \text{ で } C^{(1)} \text{ の関数} \\ \text{(ii)} & G(0) = G(1) = 0 \\ \text{(iii)} & \xi_1 > \xi_2 \text{ ならば } G(\xi_1)/\xi_1 > G(\xi_2)/\xi_2 \text{。} \end{cases}$$

この時初期条件 f が

(3)
$$0 \leqq f \leqq 1, \quad f \neq 0, \quad f ; \text{連續},$$

ならば, (1) の解 $u(t,x)$ は

(4)
$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 1$$

なる性質を持っている。この事実は直接的に通常の解析の手法で証明出来る。

$\underline{\underline{2^\circ}}$。　方法的には大道具を持ち出すことになる

し，しかもその道具自身が(4)を示すのと同性質のことを用いて示されることであるので証明の方法としては好ましくないが，(4)の現象的な意味を考えるにはつぎのような確率過程論的な方法を用いることが有益のように思える。

系列 $\{p_n\}$ は

$$(5) \qquad 0 \leqq p_n \leqq 1, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} p_n = 1$$

をみたすものとする。それに対し関数 F を

$$(6) \qquad F(\xi) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n \xi^n, \qquad \xi \in [0,1]$$

によって定める。簡単のため

$$F'(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n p_n < \infty, \qquad F''(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) p_n < \infty$$

を仮定する。さらに

$$(7) \qquad G(\xi) = \bigl(1-\xi - F(1-\xi)\bigr)k, \qquad k \text{ は正の定数},$$

とおけば，G は (2) の条件をみたしている。以下この場合のみを考える。いま方程式

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u + k\bigl(F(u) - u\bigr) \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

を考えれば分枝法則が $\{p_n, k\}$ で決まる分枝ブラウン運動がこれに対応している。(N. Ikeda – M. Nagasawa – S. Watanabe [1]). もう少し詳しく言えば $S = R^d$ とおき、その n 重対称積を S^n とし、位相和

$$\mathbb{S} = \sum_n S^n, \qquad S^0 = \{\partial\} \ (一点), \quad S^1 = S,$$

を作った時、これを状態空間にするマルコフ過程 $X = \{x_t, t \geq 0, P_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}\}$ でつぎの条件をみたすものが存在する。記号として R^d 上の関数 g に対し

$$\hat{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{n} g(x_j), & \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n] \in S^n, \ n = 2, 3, \cdots \\ g(x), & \boldsymbol{x} = x \in S, \\ 1, & x = \partial, \end{cases}$$

を考える。ここで

(9) $$u(t, \boldsymbol{x}) = \int \hat{g}(x_t(\omega)) P_{\boldsymbol{x}}(d\omega), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S},$$

とおくとき、

(i) $u(t, \boldsymbol{x}) = \widehat{u(t, \cdot)_{|S}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}$, ここで $h_{|S}$ は S への制限を表わす。

(ii) $u(t, x)$, $x \in R^d$, は (8) の解である。ただし g は $0 \leq g \leq 1$ なる連続関数とする。これが目的の分枝ブラウン運動である。

D を R^d のボレル集合でその Lebesgue 測度 $|D|$ が正のものとする。それに対し

$$Z_t^D(\omega) = \sum_{j=1}^{\xi_t(\omega)} I_D(X_t^{(j)}(\omega)), \quad X_t(\omega) = (X_t^{(1)}(\omega), \dots, X_t^{(\xi_t(\omega))}(\omega)),$$

とおく。こゝで I_D は D の特性関数。また $a = k(F'(1)-1)$ とおく。このとき S. Watanabe [3] によれば確率変数 W が存在し，$t \to \infty$ の時，確率 1 で

$$(10) \qquad \frac{Z_t^D(\omega)}{e^{at}\, t^{-\frac{d}{2}}} \longrightarrow (2\pi)^{-\frac{d}{2}} |D|\, W$$

が成りたつ。そこで (3) のような f があれば

$$\mathrm{Supp}(f) \supset D$$

なる D で上にのべた性質を持つものがとれる。いま

$$g = e^{\log(1-f)}, \qquad u(t,x) = \int \hat{g}(X_t(\omega))\, P_x(d\omega),$$

とおけばつぎの評価が成りたつ。

$$u(t,x) \leqq \int e^{\log c \; Z_t^D(\omega)}\, P_x(d\omega),$$

$$c = \sup_{x \in D} (1-f)(x).$$

(10) の性質を用いると，有界収束の性質を使って

$$\lim_{t\uparrow\infty} u(t,x) = \int e^{\log c \,\lim_{t\to\infty} Z_t^D(\omega)}\, P_x(d\omega) = 0 \tag{11}$$

が言える。一方

$$v(t,x) = 1 - u(t,x)$$

とおけば v は (1) の1意的な解であるので、(11) より (4) が示されたことになる。

したがって、分枝ブラウン運動で時刻 t における集合 D に這入っている粒子数（道 X_t の成分の数）$Z_t^D(\omega)$ が $t\to\infty$ の時無限になることが (4) が成立つ背景になっていることがわかる。

3°. 分枝ブラウン運動と比較して粒子が有界集合の外に早く出て行く場合は (4) が必ずしも成立しない。いま R^1 で、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + k\, G(u), & G(\xi) = 1 - \xi - F(1-\xi), \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{12}$$

を考えると $0 \leqq f \leqq 1$, $\mathrm{supp}(f)$: compact ならば

(13) $k < 1/2$ ならば $\lim_{t\uparrow\infty} u(t,x) = 0$,

となってしまう。この時対応する分枝マルコフ過程を考えれば有界集合にふくまれる粒子数は $t\to\infty$ の時 0 に近づい

ている。ただしこの場合は空間全体における粒子数 $Z_t(\omega)$ は 2° でのべた分枝ブラウン運動の時と同じである。

S. Watanabe [3] にはこの他にも多くの典型的な場合について粒子数の漸近的な法則がしらべられていて，それに応じて対応する方程式の解の成長問題についての解答が与えられる。

なお (12) に対応する定常な方程式

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + kG(u) = 0$$

については Kolmogorov - Petrovsky - Piscounoff [2] でしらべられている。

[1] N. Ikeda, M. Nagasawa and S. Watanabe: Branching Markov processes. I, II, III. J. Math. Kyoto. Univ. 8 (1968) 233-277, 365-410; 9 (1969), 97-162.

[2] A. Kolmogorov, I. Petrovsky et N. Piscounoff: Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quatité de matière et son application à un problème biologique, Bulletin de l'Universitè d' état à Moscou, 1 (1937), 1-25.

[3] S. Watanabe: Limit theorem for a class of branching processes. Markov processes and potential theory edited by J. Chover. John Wiley & Sonc. 1967.